Pendel = Sinusbewegung

Lösung

Um die Tangentialgeschwindigkeit v_t der Kreisbewegung zu berechnen, werden die Einheitsvektoren e_r und e_θ eingeführt. Gemäss Abbildung (1) ist e_r stets parallel zu r und e_θ steht senkrecht zu r. Es gilt also

$$\vec{e_r} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} \qquad \vec{e_\theta} = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

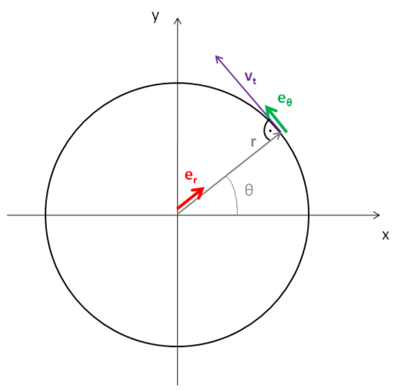

Abbildung 1: Zeitabhängige Tangentialgeschwindigkeit

Die zeitabhängige Tangentialgeschwindigkeit der Kreisbewegung lässt sich mit dem Betrag der Winkelgeschwindigkeit ω wie folgt schreiben

$$\vec{v_t}(t) = \omega r \cdot \vec{e_\theta} = -\omega r \cdot \begin{pmatrix} \sin(\omega t) \\ -\cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

Die Bewegung des Pendels verläuft wiederum in der x-Achse und darum ist die Geschwindigkeit gegeben durch

$$v(t) = -\omega r \cdot \sin(\omega t + \delta)$$

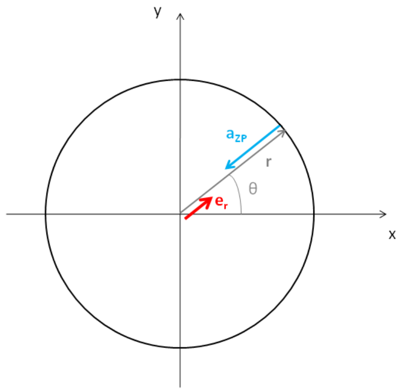

Abbildung 2: Zeitabhängige Radialbeschleunigung

Zur Bestimmung der zeitabhängigen Beschleunigung wird die Zentripetalbeschleunigung benutzt. Sie ist gegeben durch

$$\vec{a}_{ZP} = -\omega^2 r \cdot \vec{e_r} = -\omega^2 r \cdot \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

Analog lässt sich die zeitabhängige Beschleunigung für das Fadenpendel extrahieren

$$a(t) = -\omega^2 r \cdot \cos(\omega t + \delta)$$

Somit wären $v(t)$ und $a(t)$ bestimmt worden ohne ein einziges Mal an Differentialrechnung zu denken.